MPE_VPAM: Vybrané partie aplikované matematiky

Petr Zemánek (Masarykova Univerzita, Brno)

Kapitola 1: Diferenciální počet v $\mathbb{R}$

(verze: 13. září 2023)

1 Funkce

2 Polynom

3 Racionální funkce

4 Limita funkce

5 Derivace

6 Monotonie a extrémy funkce

7 Průběh funkce

8 Taylorova věta

Funkce je když ...

Nechť jsou dány množiny $D \subseteq \mathbb{R}, H \subseteq \mathbb{R}$. Předpis f, který každému $x \in D$ přiřazuje právě jedno $y \in H$, nazýváme funkcí jedné proměnné. Tuto funkci označujeme

$$y = f(x).$$

Množina D se nazývá definiční obor funkce f a značí se $D(f)$, množina H se nazývá obor hodnot funkce f a značí se $H(f)$.

Předpisy

$$f: \quad x^2 + y^2 = 1, \qquad g: \quad x = y^2$$

popisují křivky v rovině, ale nejsou funkce proměnné x, neboť k jedné hodnotě x jsou přiřazeny dvě hodnoty y, konkrétně (viz obrázek)

$$f: \quad y = \pm\sqrt{1 - x^2}, \qquad g: \quad y = \pm\sqrt{x}.$$

Funkce je když ...

Nechť jsou dány množiny $D \subseteq \mathbb{R}, H \subseteq \mathbb{R}$. Předpis f, který každému $x \in D$ přiřazuje právě jedno $y \in H$, nazýváme funkcí jedné proměnné. Tuto funkci označujeme

$$y = f(x).$$

Množina D se nazývá definiční obor funkce f a značí se $D(f)$, množina H se nazývá obor hodnot funkce f a značí se $H(f)$.

Předpisy

$$f: \quad x^2 + y^2 = 1, \qquad g: \quad x = y^2$$

popisují křivky v rovině, ale nejsou funkce proměnné x, neboť k jedné hodnotě x jsou přiřazeny dvě hodnoty y, konkrétně (viz obrázek)

$$f: \quad y = \pm\sqrt{1 - x^2}, \qquad g: \quad y = \pm\sqrt{x}.$$

Definiční obor

Základní úlohou je určení definičního oboru funkce, tj. nalezení takových hodnot x, pro které má funkční předpis smysl:

$$\text{(a)}\quad f:\ y=\tfrac{x-1}{x-2},\qquad \text{(b)}\quad f:\ y=\sqrt{x^2-3x+2},$$

$$\text{(c)}\quad f:\ y=\ln(1-x^2).$$

Graf funkce

Grafem funkce $f: D(f)\to\mathbb{R}$ rozumíme množinu bodů

$$G(f) \coloneqq \big\{[x,f(x)]\in\mathbb{R}^2 \mid x\in D(f)\big\}.$$

Křivka v rovině je grafem nějaké funkce právě tehdy, když neexistuje žádná přímka rovnoběžná s osou y, která by protínala tuto křivku více než jednou.

Sudá/lichá funkce

Řekneme, že funkce f je sudá, jestliže pro každé $x\in D(f)$ platí také $-x\in D(f)$ a $f(-x)=f(x)$ (graf je souměrný vzhledem k ose y).

Řekneme, že funkce f je lichá, jestliže pro každé $x\in D(f)$ platí také $-x\in D(f)$ a $f(-x)=-f(x)$ (graf je souměrný vzhledem k počátku).

Ohraničená funkce

Funkce f se nazývá ohraničená, jestliže existuje číslo $K>0$ takové, že $|f(x)|\leqslant K$ pro každé $x\in D(f)$.

Prostá funkce

Funkce f se nazývá prostá, právě když pro všechna $x_1,x_2\in D(f)$ platí: je-li $x_1\neq x_2$, pak $f(x_1)\neq f(x_2)$.

Inverzní funkce

Inverzní funkcí k prosté funkci f je funkce f^{-1}, pro kterou platí, že $D(f^{-1})=H(f)$ a ke každému $y\in D(f^{-1})$ je přiřazeno právě jedno $x\in D(f)$ takové, že $f(x)=y$.

Poznamenejme, že inverzní funkci lze definovat pouze pro prosté funkce. Grafy funkcí $y=f(x)$ a $y=f^{-1}(x)$ jsou symetrické podle přímky $y=x$.

Sudá/lichá funkce

Řekneme, že funkce f je <u>sudá</u>, jestliže pro každé $x \in D(f)$ platí také $-x \in D(f)$ a $f(-x) = f(x)$ (graf je souměrný vzhledem k ose y).

Řekneme, že funkce f je <u>lichá</u>, jestliže pro každé $x \in D(f)$ platí také $-x \in D(f)$ a $f(-x) = -f(x)$ (graf je souměrný vzhledem k počátku).

Ohraničená funkce

Funkce f se nazývá <u>ohraničená</u>, jestliže existuje číslo $K > 0$ takové, že $|f(x)| \leqslant K$ pro každé $x \in D(f)$.

Prostá funkce

Funkce f se nazývá <u>prostá</u>, právě když pro všechna $x_1, x_2 \in D(f)$ platí: je-li $x_1 \neq x_2$, pak $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Inverzní funkce

<u>Inverzní funkcí</u> k prosté funkci f je funkce f^{-1}, pro kterou platí, že $D(f^{-1}) = H(f)$ a ke každému $y \in D(f^{-1})$ je přiřazeno právě jedno $x \in D(f)$ takové, že $f(x) = y$.

Poznamenejme, že inverzní funkci lze definovat pouze pro prosté funkce. Grafy funkcí $y = f(x)$ a $y = f^{-1}(x)$ jsou symetrické podle přímky $y = x$.

Sudá/lichá funkce

Řekneme, že funkce f je <u>sudá</u>, jestliže pro každé $x \in D(f)$ platí také $-x \in D(f)$ a $f(-x) = f(x)$ (graf je souměrný vzhledem k ose y).

Řekneme, že funkce f je <u>lichá</u>, jestliže pro každé $x \in D(f)$ platí také $-x \in D(f)$ a $f(-x) = -f(x)$ (graf je souměrný vzhledem k počátku).

Ohraničená funkce

Funkce f se nazývá <u>ohraničená</u>, jestliže existuje číslo $K > 0$ takové, že $|f(x)| \leqslant K$ pro každé $x \in D(f)$.

Prostá funkce

Funkce f se nazývá <u>prostá</u>, právě když pro všechna $x_1, x_2 \in D(f)$ platí: je-li $x_1 \neq x_2$, pak $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Inverzní funkce

<u>Inverzní funkcí</u> k prosté funkci f je funkce f^{-1}, pro kterou platí, že $D(f^{-1}) = H(f)$ a ke každému $y \in D(f^{-1})$ je přiřazeno právě jedno $x \in D(f)$ takové, že $f(x) = y$.

Poznamenejme, že inverzní funkci lze definovat pouze pro prosté funkce. Grafy funkcí $y = f(x)$ a $y = f^{-1}(x)$ jsou symetrické podle přímky $y = x$.

Sudá/lichá funkce

Řekneme, že funkce f je <u>sudá</u>, jestliže pro každé $x \in D(f)$ platí také $-x \in D(f)$ a $f(-x) = f(x)$ (graf je souměrný vzhledem k ose y).

Řekneme, že funkce f je <u>lichá</u>, jestliže pro každé $x \in D(f)$ platí také $-x \in D(f)$ a $f(-x) = -f(x)$ (graf je souměrný vzhledem k počátku).

Ohraničená funkce

Funkce f se nazývá <u>ohraničená</u>, jestliže existuje číslo $K > 0$ takové, že $|f(x)| \leqslant K$ pro každé $x \in D(f)$.

Prostá funkce

Funkce f se nazývá <u>prostá</u>, právě když pro všechna $x_1, x_2 \in D(f)$ platí: je-li $x_1 \neq x_2$, pak $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Inverzní funkce

<u>Inverzní funkcí</u> k prosté funkci f je funkce f^{-1}, pro kterou platí, že $D(f^{-1}) = H(f)$ a ke každému $y \in D(f^{-1})$ je přiřazeno právě jedno $x \in D(f)$ takové, že $f(x) = y$.

Poznamenejme, že inverzní funkci lze definovat pouze pro prosté funkce. Grafy funkcí $y = f(x)$ a $y = f^{-1}(x)$ jsou symetrické podle přímky $y = x$.

Funkce

Sudá/lichá funkce

Řekneme, že funkce f je <u>sudá</u>, jestliže pro každé $x \in D(f)$ platí také $-x \in D(f)$ a $f(-x) = f(x)$ (graf je souměrný vzhledem k ose y).

Řekneme, že funkce f je <u>lichá</u>, jestliže pro každé $x \in D(f)$ platí také $-x \in D(f)$ a $f(-x) = -f(x)$ (graf je souměrný vzhledem k počátku).

Ohraničená funkce

Funkce f se nazývá <u>ohraničená</u>, jestliže existuje číslo $K > 0$ takové, že $|f(x)| \leqslant K$ pro každé $x \in D(f)$.

Prostá funkce

Funkce f se nazývá <u>prostá</u>, právě když pro všechna $x_1, x_2 \in D(f)$ platí: je-li $x_1 \neq x_2$, pak $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Inverzní funkce

<u>Inverzní funkcí</u> k prosté funkci f je funkce f^{-1}, pro kterou platí, že $D(f^{-1}) = H(f)$ a ke každému $y \in D(f^{-1})$ je přiřazeno právě jedno $x \in D(f)$ takové, že $f(x) = y$.

Poznamenejme, že inverzní funkci lze definovat pouze pro prosté funkce. Grafy funkcí $y = f(x)$ a $y = f^{-1}(x)$ jsou symetrické podle přímky $y = x$.

Petr Zemánek (PřF MU, Brno) zemanekp@math.muni.cz MPE_VPAM: Kapitola 1 13. září 2023 5 / 54

Periodická funkce

Funkce f se nazývá periodická s periodou $p \in \mathbb{R}$, $p > 0$, jestliže platí, že pro každé $x \in D(f)$ je také $x \pm p \in D(f)$ a $f(x+p) = f(x-p) = f(x)$. Nejmenší perioda funkce je nejmenší prvek množiny všech period této funkce.

Monotónní funkce

Nechť je dána funkce $f : D(f) \to \mathbb{R}$ a interval $I \subseteq D(f)$. Pak funkci f nazveme rostoucí na intervalu I, jestliže pro každá dvě $x_1,\ x_2 \in I$ taková, že $x_1 < x_2$, je $f(x_1) < f(x_2)$.

Funkci f nazveme klesající na intervalu I, jestliže pro každé $x_1,\ x_2 \in I$ taková, že $x_1 < x_2$, je $f(x_1) > f(x_2)$.

Funkce, která je pouze rostoucí nebo pouze klesající, se souhrnně nazývá ryze monotonní.

Složená funkce

Nechť $u : A \to B$ a $f : B \to \mathbb{R}$ jsou funkce. Pak funkce $F : A \to \mathbb{R}$ daná předpisem $y = f(u(x))$ se nazývá složená funkce. Funkce u se nazývá vnitřní složkou, funkce f vnější složkou složené funkce F.

Periodická funkce

Funkce f se nazývá periodická s periodou $p \in \mathbb{R}$, $p > 0$, jestliže platí, že pro každé $x \in D(f)$ je také $x \pm p \in D(f)$ a $f(x+p) = f(x-p) = f(x)$. Nejmenší perioda funkce je nejmenší prvek množiny všech period této funkce.

Monotónní funkce

Nechť je dána funkce $f : D(f) \to \mathbb{R}$ a interval $I \subseteq D(f)$. Pak funkci f nazveme rostoucí na intervalu I, jestliže pro každá dvě $x_1,\ x_2 \in I$ taková, že $x_1 < x_2$, je $f(x_1) < f(x_2)$.

Funkci f nazveme klesající na intervalu I, jestliže pro každé $x_1,\ x_2 \in I$ taková, že $x_1 < x_2$, je $f(x_1) > f(x_2)$.

Funkce, která je pouze rostoucí nebo pouze klesající, se souhrnně nazývá ryze monotonní.

Složená funkce

Nechť $u : A \to B$ a $f : B \to \mathbb{R}$ jsou funkce. Pak funkce $F : A \to \mathbb{R}$ daná předpisem $y = f(u(x))$ se nazývá složená funkce. Funkce u se nazývá vnitřní složkou, funkce f vnější složkou složené funkce F.

Periodická funkce

Funkce f se nazývá periodická s periodou $p \in \mathbb{R}$, $p > 0$, jestliže platí, že pro každé $x \in D(f)$ je také $x \pm p \in D(f)$ a $f(x+p) = f(x-p) = f(x)$. Nejmenší perioda funkce je nejmenší prvek množiny všech period této funkce.

Monotónní funkce

Nechť je dána funkce $f : D(f) \to \mathbb{R}$ a interval $I \subseteq D(f)$. Pak funkci f nazveme rostoucí na intervalu I, jestliže pro každá dvě $x_1,\ x_2 \in I$ taková, že $x_1 < x_2$, je $f(x_1) < f(x_2)$.

Funkci f nazveme klesající na intervalu I, jestliže pro každé $x_1,\ x_2 \in I$ taková, že $x_1 < x_2$, je $f(x_1) > f(x_2)$.

Funkce, která je pouze rostoucí nebo pouze klesající, se souhrnně nazývá ryze monotonní.

Složená funkce

Nechť $u : A \to B$ a $f : B \to \mathbb{R}$ jsou funkce. Pak funkce $F : A \to \mathbb{R}$ daná předpisem $y = f(u(x))$ se nazývá složená funkce. Funkce u se nazývá vnitřní složkou, funkce f vnější složkou složené funkce F.

1 Funkce

2 Polynom

3 Racionální funkce

4 Limita funkce

5 Derivace

6 Monotonie a extrémy funkce

7 Průběh funkce

8 Taylorova věta

Polynom

Funkci $P:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tvaru

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0,\quad \text{kde}\quad a_0,a_1,\dots,a_n\in\mathbb{R},$$

nazýváme polynomem (též mnohočlenem). Čísla a_i se nazývají koeficienty polynomu. Je-li $a_n\neq 0$, pak číslo n nazveme stupněm polynomu a značíme $\operatorname{st}P$.

Kořen polynomu

Číslo $\alpha\in\mathbb{C}$ se nazývá kořen polynomu P, jestliže $P(\alpha)=0$.

Číslo α je k-násobným kořenem polynomu P, existuje-li polynom Q takový, že

$$P(x)=(x-\alpha)^kQ(x),$$

a α není kořenem polynomu Q, tj. $Q(\alpha)\neq 0$. (Pro $k=1$ používáme název jednoduchý kořen.) Číslo $k\in\mathbb{N}$ se pak nazývá násobnost kořene α polynomu P.

Polynom

Polynom

Funkci $P:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tvaru

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0,\quad \text{kde}\quad a_0,a_1,\dots,a_n\in\mathbb{R},$$

nazýváme polynomem (též mnohočlenem). Čísla a_i se nazývají koeficienty polynomu. Je-li $a_n\neq 0$, pak číslo n nazveme stupněm polynomu a značíme $\operatorname{st}P$.

Kořen polynomu

Číslo $\alpha\in\mathbb{C}$ se nazývá kořen polynomu P, jestliže $P(\alpha)=0$.

Číslo α je k-násobným kořenem polynomu P, existuje-li polynom Q takový, že

$$P(x)=(x-\alpha)^kQ(x),$$

a α není kořenem polynomu Q, tj. $Q(\alpha)\neq 0$. (Pro $k=1$ používáme název jednoduchý kořen.) Číslo $k\in\mathbb{N}$ se pak nazývá násobnost kořene α polynomu P.

Petr Zemánek (PřF MU, Brno) zemanekp@math.muni.cz MPE_VPAM: Kapitola 1 13. září 2023 8 / 54

Polynom

Funkci $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tvaru

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0, \quad \text{kde} \quad a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R},$$

nazýváme polynomem (též mnohočlenem). Čísla a_i se nazývají koeficienty polynomu. Je-li $a_n \neq 0$, pak číslo n nazveme stupněm polynomu a značíme $\operatorname{st} P$.

Kořen polynomu

Číslo $\alpha \in \mathbb{C}$ se nazývá kořen polynomu P, jestliže $P(\alpha) = 0$.

Číslo α je k-násobným kořenem polynomu P, existuje-li polynom Q takový, že

$$P(x) = (x - \alpha)^k Q(x),$$

a α není kořenem polynomu Q, tj. $Q(\alpha) \neq 0$. (Pro $k = 1$ používáme název jednoduchý kořen.) Číslo $k \in \mathbb{N}$ se pak nazývá násobnost kořene α polynomu P.

Vlastnosti polynomů

Nechť $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$, kde $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ je polynom stupně $n \geqslant 0$.

i) Je zřejmé, že definičním oborem polynomu je celé $\mathbb{R}$.

ii) Je-li $P(x) = a_0 \neq 0$ (konstantní funkce), jde o polynom nulového stupně. (Polynom $P(x) = a_0 = 0$ „nemá stupeň“.)

iii) Mezi polynomy definujeme operace sčítání a násobení tak, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $(P \pm Q)(x) = P(x) \pm Q(x)$ a $(P \cdot Q)(x) = P(x) \cdot Q(x)$, tj. při sčítání sčítáme koeficienty u stejných mocnin proměnné x a při násobení jde o obyčejné násobení mnohočlenů. Součet (resp. rozdíl) a součin dvou polynomů je opět polynom.

iv) Dva polynomy P, Q stupně n jsou si rovny, jestliže jsou si rovny koeficienty u sobě odpovídajících mocnin.

v) Základní věta algebry: Polynom P má nad komplexním oborem $\mathbb{C}$ právě n kořenů, počítáme-li každý kořen tolikrát, kolik je jeho násobnost.

vi) Je-li komplexní číslo α k-násobným kořenem reálného polynomu P, je číslo komplexně sdružené $\bar{\alpha}$ rovněž k-násobným kořenem polynomu P.

vii) Nechť $a_n = 1$. Je-li celé číslo α kořenem polynomu P s celočíselnými koeficienty, pak α musí být dělitelem čísla a_0.

Vlastnosti polynomů

Nechť $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$, kde $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ je polynom stupně $n \geqslant 0$.

i) Je zřejmé, že definičním oborem polynomu je celé $\mathbb{R}$.

ii) Je-li $P(x) = a_0 \neq 0$ (konstantní funkce), jde o polynom nulového stupně. (Polynom $P(x) = a_0 = 0$ „nemá stupeň“.)

iii) Mezi polynomy definujeme operace sčítání a násobení tak, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $(P \pm Q)(x) = P(x) \pm Q(x)$ a $(P \cdot Q)(x) = P(x) \cdot Q(x)$, tj. při sčítání sčítáme koeficienty u stejných mocnin proměnné x a při násobení jde o obyčejné násobení mnohočlenů. Součet (resp. rozdíl) a součin dvou polynomů je opět polynom.

iv) Dva polynomy P, Q stupně n jsou si rovny, jestliže jsou si rovny koeficienty u sobě odpovídajících mocnin.

v) Základní věta algebry: Polynom P má nad komplexním oborem $\mathbb{C}$ právě n kořenů, počítáme-li každý kořen tolikrát, kolik je jeho násobnost.

vi) Je-li komplexní číslo α k-násobným kořenem reálného polynomu P, je číslo komplexně sdružené $\bar{\alpha}$ rovněž k-násobným kořenem polynomu P.

vii) Nechť $a_n = 1$. Je-li celé číslo α kořenem polynomu P s celočíselnými koeficienty, pak α musí být dělitelem čísla a_0.

Rozklad polynomu v oboru reálných čísel

Nechť $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$, kde $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ je polynom stupně $n \geqslant 0$.

Jsou-li $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ všechny reálné kořeny polynomu P s násobnostmi $k_1, \ldots, k_r$ a $(c_1 \pm i\, d_1), \ldots, (c_s \pm i\, d_s)$ všechny navzájem různé dvojice komplexně sdružených kořenů s násobnostmi $r_1, \ldots, r_s$, pak platí

$$P(x) = a_n (x-\alpha_1)^{k_1} \cdots (x-\alpha_r)^{k_r} \, [(x-c_1)^2 + d_1^2]^{r_1} \cdots [(x-c_s)^2 + d_s^2]^{r_s}.$$

Znaménko polynomu

Úlohou určení znaménka polynomu rozumíme nalezení intervalů, kde je polynom kladný a kde záporný. Tato úloha je důležitá při vyšetřování průběhu funkce. K určení znaménka hodnot polynomu použijeme rozklad polynomu a následující fakt. Jsou-li $x_1 < x_2 < \cdots < x_m$ všechny jeho navzájem různé reálné kořeny, pak v každém z intervalů $(-\infty, x_1), (x_1, x_2), \ldots, (x_m, \infty)$ je polynom stále kladný nebo stále záporný. (A pro obecnější funkce?)

Příklad

Určete znaménko polynomu $P(x) = (x^2 - x)(x-2)^2$ a načrtněte jeho graf.

Hornerovo schéma

Mějme polynom $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$. Jeho hodnotu pro číslo c určíme pomocí následující tabulky, kterou nazýváme Hornerovo schéma:

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\cdots$	a_1	a_0
c	a_n	$\underbrace{c \cdot a_n + a_{n-1}}_{c_1}$	$\underbrace{c \cdot c_1 + a_{n-2}}_{c_2}$	$\cdots$	$\underbrace{c \cdot c_{n-2} + a_1}_{c_{n-1}}$	$\underbrace{c \cdot c_{n-1} + a_0}_{c_n}$

Poslední získaná hodnota c_n je hodnota polynomu P v bodě c. Upozorněme, že v záhlaví tabulky jsou všechny koeficienty, tj. i případné nuly zastupující mocniny, které v polynomu chybí.

Je-li $c_n = 0$, tj. $P(c) = 0$, pak číslo c je kořenem. V tomto případě jsou čísla $a_n, c_1, \ldots, c_{n-1}$ koeficienty polynomu $Q(x)$ stupně $n-1$, pro který platí $P(x) = (x-c)Q(x)$. Tedy pro hledání dalších kořenů můžeme použít „jednodušší" polynom Q.

Příklad

Určete kořeny polynomu $P(x) = 3x^3 - 2x^2 + x - 18$.

1 Funkce
2 Polynom
3 Racionální funkce
4 Limita funkce
5 Derivace
6 Monotonie a extrémy funkce
7 Průběh funkce
8 Taylorova věta

Racionální lomené funkce

Nechť P, Q jsou nenulové polynomy. Funkce

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

se nazývá racionální lomená funkce (též pouze racionální funkce). Tuto funkci nazveme ryze lomenou, platí-li $\operatorname{st} P < \operatorname{st} Q$, a neryze lomenou, platí-li $\operatorname{st} P \geqslant \operatorname{st} Q$.

Příkladem ryze lomené racionální funkce jsou funkce

$$\frac{1}{x}, \qquad \frac{x^2+1}{x^5}.$$

Příkladem neryze lomené racionální funkce jsou funkce

$$\frac{x^2+1}{x}, \qquad \frac{x^2+2}{2x^2-1}.$$

Vlastnosti RLF

i) Definičním oborem racionální funkce $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ je množina tvaru

$$D(R) = (-\infty, \infty) \setminus \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\},$$

kde $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ jsou všechny reálné kořeny polynomu Q.

ii) Je-li $\frac{P(x)}{Q(x)}$ neryze lomená racionální funkce, pak dělením polynomů P a Q obdržíme součet polynomu a ryze lomené racionální funkce. Například

$$\frac{x^3+2x}{x^2+2x+1} = x - 2 + \frac{5x+2}{x^2+2x+1}.$$

iii) Znaménko racionální lomené funkce určíme podobně jako u polynomu.

Rozklad ryze lomené RF na parciální zlomky (i)

Nechť $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ je ryze lomená racionální funkce. Každou takovou funkci lze rozložit na součet následujících parciálních zlomků dle kořenů polynomu Q:

• Je-li číslo α reálný jednoduchý kořen polynomu Q, pak rozklad funkce R obsahuje parciální zlomek tvaru

$$\frac{A}{(x-\alpha)}.$$

• Je-li číslo α reálný k-násobný kořen polynomu Q, pak rozklad obsahuje součet k parciálních zlomků

$$\frac{A}{(x-\alpha)} + \frac{B}{(x-\alpha)^2} + \cdots + \frac{M}{(x-\alpha)^k}.$$

Rozklad ryze lomené RF na parciální zlomky (ii)

• Jsou-li čísla $\alpha \pm i\beta$ komplexně sdružené jednoduché kořeny polynomu Q, pak rozklad obsahuje parciální zlomek tvaru

$$\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c},$$

kde ax^2+bx+c má kořeny $\alpha \pm i\beta$.

• Jsou-li čísla $\alpha \pm i\beta$ dvojnásobné komplexně sdružené kořeny polynomu Q, pak R obsahuje součet dvou parciálních zlomků

$$\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c} + \frac{Cx+D}{(ax^2+bx+c)^2}.$$

Podobně trojnásobné dvojici komplexních kořenů odpovídá součet tří parciálních zlomků atd.

Rozklad racionální lomené funkce R je součtem všech parciálních zlomků výše uvedených tvarů, které přísluší všem kořenům polynomu Q.

Rozklad ryze lomené RF na parciální zlomky (iii)

Konstanty v parciálních zlomcích jsou určeny jednoznačně a lze je nalézt metodou neurčitých koeficientů, tj. napíšeme formální tvar rozkladu a celou rovnost vynásobíme polynomem Q.

Dostaneme tak rovnost dvou polynomů pro všechna x kromě kořenů jmenovatele. Tyto polynomy jsou identické, tj. mají stejné koeficienty, které určíme pomocí dvou možných způsobů:

- porovnáním koeficientů u odpovídajících si mocnin,
- dosazením konkrétních hodnot x (vhodné jsou zvláště kořeny jmenovatele Q).

Získáme soustavu n lineárních rovnic pro n neznámých, kterou vyřešíme.

Příklad

Napište obecný rozklad na parciální zlomky pro RLF

$$R(x) = \frac{x^2+7x+1}{x(x-1)^3(x^2+x+1)^2}.$$

Příklad

Určete rozklad na parciální zlomky pro RLF:

(a) $R(x) = \frac{x+1}{x^3+5x^2+8x-4}$, (b) $R(x) = \frac{2x^5+5x^3-x^2+2x-1}{x^6+2x^4+x^2}$.

1 Funkce
2 Polynom
3 Racionální funkce
4 Limita funkce
5 Derivace
6 Monotonie a extrémy funkce
7 Průběh funkce
8 Taylorova věta

$\boxed{\infty \rightsquigarrow \mathbb{R}^*}$

Hrátky s nekonečně malými a velkými veličinami

Funkce $y = f(x)$ má v bodě x^* limitu L, jestliže se s hodnotami funkce f můžeme libovolně přiblížit číslu L tak, že vezmeme hodnoty x dostatečně blízké hodnotě x^*, ale různé od x^*. Zapisujeme

$$\lim_{x \to x^*} f(x) = L.$$

Říkáme, že funkce má ve vlastním bodě vlastní limitu.

Funkce $y = f(x)$ má v bodě x^* limitu rovnu ∞, jestliže hodnoty funkce f můžeme udělat libovolně velké tak, že vezmeme hodnoty x dostatečně blízké hodnotě x^*, ale různé od x^*. Zapisujeme

$$\lim_{x \to x^*} f(x) = \infty.$$

Říkáme, že funkce má ve vlastním bodě nevlastní limitu. Podobně můžeme tuto limitu popsat pro $-\infty$.

Funkce $y = f(x)$ má v bodě ∞ limitu L, jestliže se s hodnotami funkce f můžeme libovolně přiblížit číslu L tak, že vezmeme hodnoty x dostatečně velké. Zapisujeme

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L.$$

Říkáme, že funkce má v nevlastním bodě vlastní limitu. Podobně můžeme tuto limitu popsat pro $-\infty$.

$\boxed{\infty \rightsquigarrow \mathbb{R}^*}$

Hrátky s nekonečně malými a velkými veličinami

Funkce $y = f(x)$ má v bodě x^* limitu L, jestliže se s hodnotami funkce f můžeme libovolně přiblížit číslu L tak, že vezmeme hodnoty x dostatečně blízké hodnotě x^*, ale různé od x^*. Zapisujeme

$$\lim_{x \to x^*} f(x) = L.$$

Říkáme, že funkce má ve vlastním bodě vlastní limitu.

Funkce $y = f(x)$ má v bodě x^* limitu rovnu ∞, jestliže hodnoty funkce f můžeme udělat libovolně velké tak, že vezmeme hodnoty x dostatečně blízké hodnotě x^*, ale různé od x^*. Zapisujeme

$$\lim_{x \to x^*} f(x) = \infty.$$

Říkáme, že funkce má ve vlastním bodě nevlastní limitu. Podobně můžeme tuto limitu popsat pro $-\infty$.

Funkce $y = f(x)$ má v bodě ∞ limitu L, jestliže se s hodnotami funkce f můžeme libovolně přiblížit číslu L tak, že vezmeme hodnoty x dostatečně velké. Zapisujeme

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L.$$

Říkáme, že funkce má v nevlastním bodě vlastní limitu. Podobně můžeme tuto limitu popsat pro $-\infty$.

Okolí bodu

Nechť $x^*, \delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$. Pak interval $\mathcal{O}(x^*) = (x^* - \delta, x^* + \delta)$ nazveme okolím bodu x^*.

Nechť $a \in \mathbb{R}$. Pak interval $\mathcal{O}(\infty) = (a, \infty)$ nazveme okolím bodu ∞ a interval $\mathcal{O}(-\infty) = (-\infty, a)$ okolím bodu $-\infty$.

Limita funkce (univerzální definice)

Nechť $x^*, L \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$. Řekneme, že funkce f má v bodě x^* limitu rovnu číslu L a píšeme $\lim_{x\to x^*} f(x) = L$, jestliže ke každému okolí $\mathcal{O}(L)$ bodu L existuje okolí $\mathcal{O}(x^*)$ bodu x^* tak, že pro $x \in \mathcal{O}(x^*) \setminus \{x^*\}$ platí $f(x) \in \mathcal{O}(L)$.

Jednostranné limity

Řekneme, že funkce f má v bodě x^* limitu zleva rovnu L, píšeme

$$\lim_{x\to x^{*-}} f(x) = L,$$

jestliže se s hodnotami funkce f můžeme libovolně přiblížit číslu L tak, že vezmeme hodnoty x menší než x^* a dostatečně blízké hodnotě x^*.

Podobně můžeme popsat limitu zprava i příslušné nevlastní limity.

Okolí bodu

Nechť $x^*, \delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$. Pak interval $\mathcal{O}(x^*) = (x^* - \delta, x^* + \delta)$ nazveme okolím bodu x^*.

Nechť $a \in \mathbb{R}$. Pak interval $\mathcal{O}(\infty) = (a, \infty)$ nazveme okolím bodu ∞ a interval $\mathcal{O}(-\infty) = (-\infty, a)$ okolím bodu $-\infty$.

Limita funkce (univerzální definice)

Nechť $x^*, L \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$. Řekneme, že funkce f má v bodě x^* limitu rovnu číslu L a píšeme $\lim_{x\to x^*} f(x) = L$, jestliže ke každému okolí $\mathcal{O}(L)$ bodu L existuje okolí $\mathcal{O}(x^*)$ bodu x^* tak, že pro $x \in \mathcal{O}(x^*) \setminus \{x^*\}$ platí $f(x) \in \mathcal{O}(L)$.

Jednostranné limity

Řekneme, že funkce f má v bodě x^* limitu zleva rovnu L, píšeme

$$\lim_{x\to x^{*-}} f(x) = L,$$

jestliže se s hodnotami funkce f můžeme libovolně přiblížit číslu L tak, že vezmeme hodnoty x menší než x^* a dostatečně blízké hodnotě x^*.

Podobně můžeme popsat limitu zprava i příslušné nevlastní limity.

Vlastnosti limity (i)

i) Funkce f má v libovolném bodě nejvýše jednu limitu.

ii) Má-li funkce vlastní limitu v bodě x^*, potom je funkce f ohraničená na nějakém ryzím okolí bodu x^*.

iii) Platí $\lim_{x\to x^*} f(x) = L$ právě tehdy, když

$$\lim_{x\to x^{*-}} f(x) = \lim_{x\to x^{*+}} f(x) = L.$$

iv) Nechť existují obě vlastní limity

$$\lim_{x\to x^*} f(x) = L_1 \quad \text{a} \quad \lim_{x\to x^*} g(x) = L_2.$$

Pak platí:

a) $\lim_{x\to x^*}(f(x) \pm g(x)) = L_1 \pm L_2$,
b) $\lim_{x\to x^*}(f(x) \cdot g(x)) = L_1 \cdot L_2$,
c) Je-li $L_2 \neq 0$, pak $\lim_{x\to x^*} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L_1}{L_2}$,
d) $\lim_{x\to x^*} |f(x)| = |\lim_{x\to x^*} f(x)|$.

Vlastnosti limity (ii)

i) Je-li $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$ na nějakém ryzím okolí bodu x^* a je-li

$$\lim_{x\to x^*} g(x) = L = \lim_{x\to x^*} h(x),$$

potom existuje také limita funkce f v bodě x^* a platí

$$\lim_{x\to x^*} f(x) = L.$$

ii) Nechť $\lim_{x\to x^*} f(x) = 0$ a existuje ryzí okolí bodu x^* takové, že funkce $g(x)$ je v něm ohraničená, potom $\lim_{x\to x^*} f(x)\, g(x) = 0$.

Pro výpočet limity podílu

$$\lim_{x\to x^*} \frac{f(x)}{g(x)},$$

kde $\lim_{x\to x^*} f(x) = 1$ a $\lim_{x\to x^*} g(x) = \pm\infty$ nebo $\lim_{x\to x^*} g(x) = 0$, platí vztahy vyjádřené symbolicky

$$\frac{1}{\pm\infty} = 0, \quad \frac{1}{+0} = +\infty, \quad \frac{1}{-0} = -\infty. \tag{1}$$

Je-li $\lim_{x\to x^*} f(x) = c$ a $\lim_{x\to x^*} g(x) = 0$, pak je vztahy v (1) třeba modifikovat podle znaménka čísla c.

V případech limit typu vyjádřených symbolicky

$$\infty - \infty, \quad 0 \cdot \infty, \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \quad \frac{0}{0}, \quad 1^\infty, \quad 0^0, \quad \infty^0$$

je situace „nejednoznačná“ (jde o tzv. neurčité výrazy).

Příklad

Vypočtěte limity:

(a) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sin(x+1/2)\pi}{x^2-x+1}$,

(b) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2+x-6}{x^2-3x+2}$,

(c) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x+2}{(x-2)^6}$,

(d) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x+2}{(x-2)^5}$,

(e) $\lim\limits_{x\to 0} x \sin \frac{1}{x}$,

(f) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{\sin x+\pi x}{2\cos x-x}$,

(g) $\lim\limits_{x\to\infty} \left[x^2\left(\sqrt{x^2+1/x}-x\right)\right]$.

Spojitost funkce

Nechť $x^* \in \mathbb{R}$. Řekneme, že funkce f je v bodě x^* spojitá, jestliže je limita funkce v tomto bodě rovna funkční hodnotě v tomto bodě, tj. $\lim_{x\to x^*} f(x) = f(x^*)$. (Podobně definujeme i jednostranné spojitosti pomocí jednostranných limit.)

Nechť f je funkce a $I \subseteq D(f)$ je interval. Řekneme, že funkce f je spojitá na intervalu I, jestliže je spojitá v každém vnitřním bodě tohoto intervalu. Patří-li navíc levý (pravý) koncový bod do I, požadujeme, aby v něm funkce f byla spojitá zprava (zleva).

Je-li $I = [a, b]$, často se fakt, že je funkce na tomto intervalu spojitá, zapisuje $f \in C[a, b]$ (nebo jen $f \in C$).

Vlastnosti spojitých funkcí

i) Weierstrassova věta: Nechť f je spojitá na intervalu $I = [a, b]$. Pak je na tomto intervalu ohraničená a nabývá zde své největší i nejmenší hodnoty. (Protipříklady?)

ii) Bolzanova věta: Nechť f je spojitá na intervalu $I = [a, b]$. Pak na tomto intervalu nabývá všech hodnot mezi svou největší a nejmenší hodnotou.

iii) Je-li funkce f spojitá na intervalu $I = [a, b]$ a $f(a)f(b) < 0$, pak existuje bod $c \in (a, b)$ takový, že $f(c) = 0$.

Spojitost funkce

Nechť $x^* \in \mathbb{R}$. Řekneme, že funkce f je v bodě x^* spojitá, jestliže je limita funkce v tomto bodě rovna funkční hodnotě v tomto bodě, tj. $\lim_{x \to x^*} f(x) = f(x^*)$. (Podobně definujeme i jednostranné spojitosti pomocí jednostranných limit.)

Nechť f je funkce a $I \subseteq D(f)$ je interval. Řekneme, že funkce f je spojitá na intervalu I, jestliže je spojitá v každém vnitřním bodě tohoto intervalu. Patří-li navíc levý (pravý) koncový bod do I, požadujeme, aby v něm funkce f byla spojitá zprava (zleva).

Je-li $I = [a, b]$, často se fakt, že je funkce na tomto intervalu spojitá, zapisuje $f \in C[a, b]$ (nebo jen $f \in C$).

Vlastnosti spojitých funkcí

i) Weierstrassova věta: Nechť f je spojitá na intervalu $I = [a, b]$. Pak je na tomto intervalu ohraničená a nabývá zde své největší i nejmenší hodnoty. (Protipříklady?)

ii) Bolzanova věta: Nechť f je spojitá na intervalu $I = [a, b]$. Pak na tomto intervalu nabývá všech hodnot mezi svou největší a nejmenší hodnotou.

iii) Je-li funkce f spojitá na intervalu $I = [a, b]$ a $f(a)f(b) < 0$, pak existuje bod $c \in (a, b)$ takový, že $f(c) = 0$.

Elementární funkce

- mnohočleny,
- exponenciální a logaritmické funkce,
- goniometrické, cyklometrické a hyperbolické funkce,
- mocninná funkce (např. $\sqrt{x}$, obecně funkce x^a, kde $a \in \mathbb{R}$ a $x > 0$)

a všechny funkce, které z nich vzniknou konečným počtem aritmetických operací sčítání, odčítání, násobení a dělení, skládáním a tvořením funkcí inverzních.

Tyto funkce jsou spojité ve všech bodech definičního oboru. Tudíž limita těchto funkcí v daném bodě je rovna funkční hodnotě.

Elementární funkce

- mnohočleny,
- exponenciální a logaritmické funkce,
- goniometrické, cyklometrické a hyperbolické funkce,
- mocninná funkce (např. $\sqrt{x}$, obecně funkce x^a, kde $a \in \mathbb{R}$ a $x > 0$)

a všechny funkce, které z nich vzniknou konečným počtem aritmetických operací sčítání, odčítání, násobení a dělení, skládáním a tvořením funkcí inverzních.

Tyto funkce jsou spojité ve všech bodech definičního oboru. Tudíž limita těchto funkcí v daném bodě je rovna funkční hodnotě.

1 Funkce
2 Polynom
3 Racionální funkce
4 Limita funkce
5 Derivace
6 Monotonie a extrémy funkce
7 Průběh funkce
8 Taylorova věta

Definice derivace

Nechť je dána funkce f a bod $x^* \in D(f)$. Existuje-li vlastní limita

$$\lim_{x \to x^*} \frac{f(x) - f(x^*)}{x - x^*},$$

nazýváme tuto limitu derivací funkce f v bodě x^* a značíme $f'(x^*)$ nebo $\frac{df}{dx}(x^*)$ nebo $\big(f(x)\big)'_{x=x^*}$.

K tomu, aby funkce f mohla mít derivaci v bodě x^*, musí být definována v nějakém okolí bodu x^* (včetně bodu x^*).

Podobně definujeme derivace zprava a derivace zleva:

$$f'_+(x^*) = \lim_{x \to x^*+} \frac{f(x) - f(x^*)}{x - x^*}, \qquad f'_-(x^*) = \lim_{x \to x^*-} \frac{f(x) - f(x^*)}{x - x^*}.$$

Vlastnosti derivace

Bezprostředně z definice plynou tyto důležité vlastnosti:

i) Funkce má v daném bodě nejvýše jednu derivaci.

ii) Položíme-li $h = x - x^*$, lze derivaci zapsat ve tvaru

$$f'(x^*) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x^* + h) - f(x^*)}{h}.$$

iii) Funkce f má v x^* derivaci právě tehdy, když má v tomto bodě derivaci zprava i zleva a jsou si rovny.

Derivace

Definice derivace

Nechť je dána funkce f a bod $x^* \in D(f)$. Existuje-li vlastní limita

$$\lim_{x \to x^*} \frac{f(x) - f(x^*)}{x - x^*},$$

nazýváme tuto limitu derivací funkce f v bodě x^* a značíme $f'(x^*)$ nebo $\frac{df}{dx}(x^*)$ nebo $\big(f(x)\big)'_{x=x^*}$.

K tomu, aby funkce f mohla mít derivaci v bodě x^*, musí být definována v nějakém okolí bodu x^* (včetně bodu x^*).

Podobně definujeme derivace zprava a derivace zleva:

$$f'_+(x^*) = \lim_{x \to x^*+} \frac{f(x) - f(x^*)}{x - x^*}, \qquad f'_-(x^*) = \lim_{x \to x^*-} \frac{f(x) - f(x^*)}{x - x^*}.$$

Vlastnosti derivace

Bezprostředně z definice plynou tyto důležité vlastnosti:

i) Funkce má v daném bodě nejvýše jednu derivaci.

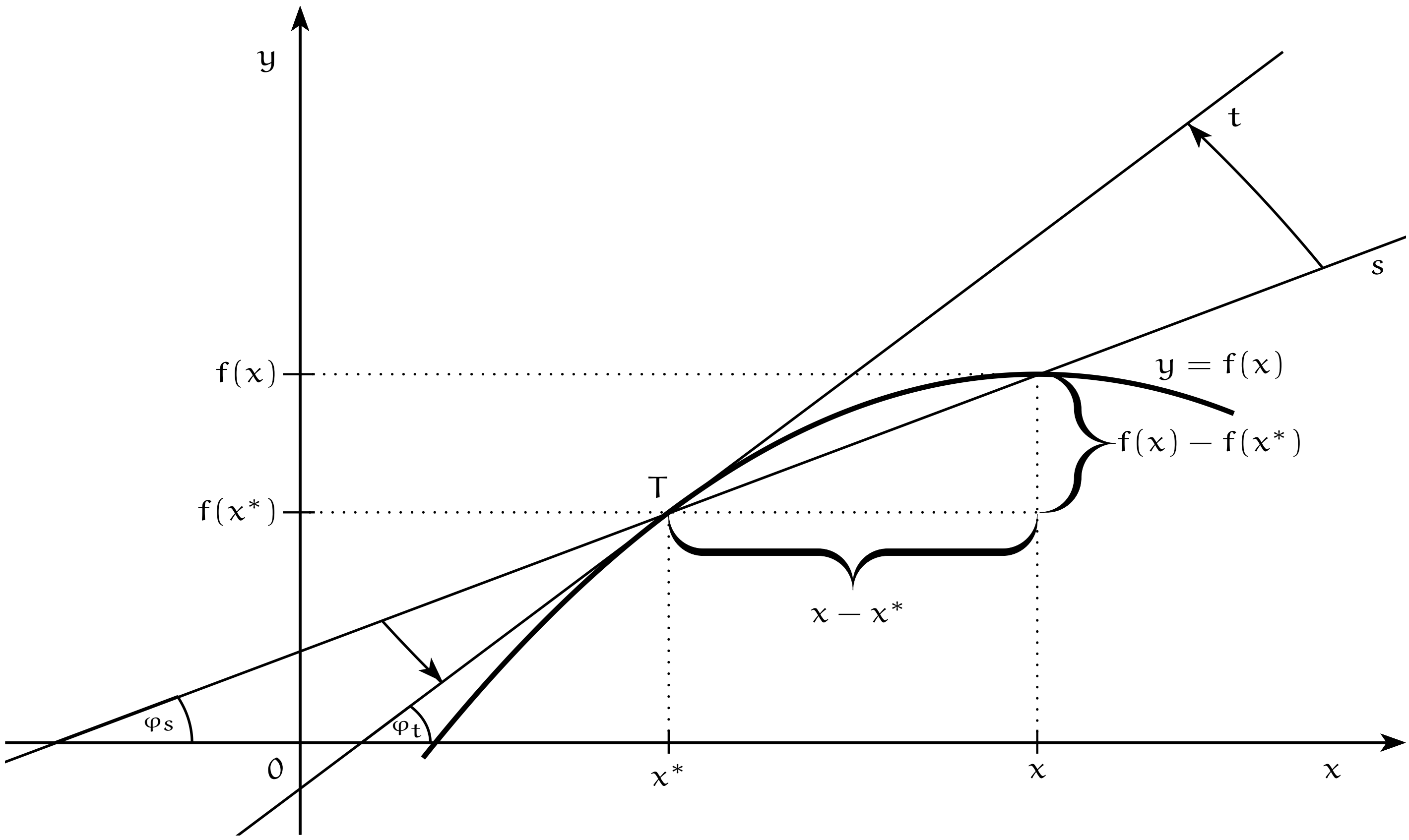
ii) Položíme-li $h = x - x^*$, lze derivaci zapsat ve tvaru

$$f'(x^*) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x^* + h) - f(x^*)}{h}.$$

iii) Funkce f má v x^* derivaci právě tehdy, když má v tomto bodě derivaci zprava i zleva a jsou si rovny.

Petr Zemánek (PřF MU, Brno) zemanekp@math.muni.cz MPE_VPAM: Kapitola 1 13. září 2023 27 / 54

Geometrický význam derivace



Z geometrického významu derivace plyne, že funkce f má v bodě x^* derivaci právě tehdy, když její graf má v bodě $(x^*, f(x^*))$ tečnu se směrnicí $f'(x^*)$. Rovnice této tečny v bodě $T = (x^*, f(x^*))$ je

$$y = f(x^*) + f'(x^*)(x - x^*).$$

(Toto nám vlastně dává pěkný vztah pro lineární aproximaci funkce.)

A jiné interpretace?

Příklad

Rozhodněte, zda mají funkce $y = x^2$ a $y = |x|$ derivaci v bodě $x^* = 0$.

Příklad

Z definice derivace odvoďte derivaci funkce $y = x^2$ v libovolném $x^* \in \mathbb{R}$.

Derivace vyšších řádů

Protože lze derivaci funkce f chápat jako funkci, můžeme definovat derivaci funkce f' v nějakém bodě x^*; tu pak nazýváme druhou derivací funkce f v bodě x^* a značíme $f''(x^*)$. Rovněž vlastní druhou derivaci funkce f lze chápat jako funkci f'' na množině $D(f'') \subseteq D(f')$. Ta může mít opět derivaci v některém bodě atd. Obecně definujeme:

Druhou derivací funkce f rozumíme funkci $f'' = (f')'$ a pro libovolné $n \geqslant 2$ definujeme n-tou derivaci (derivaci n-tého řádu) funkce f vztahem $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$.

Z geometrického významu derivace plyne, že funkce f má v bodě x^* derivaci právě tehdy, když její graf má v bodě $(x^*, f(x^*))$ tečnu se směrnicí $f'(x^*)$. Rovnice této tečny v bodě $T = (x^*, f(x^*))$ je

$$y = f(x^*) + f'(x^*)(x - x^*).$$

(Toto nám vlastně dává pěkný vztah pro lineární aproximaci funkce.)

A jiné interpretace?

Příklad

Rozhodněte, zda mají funkce $y = x^2$ a $y = |x|$ derivaci v bodě $x^* = 0$.

Příklad

Z definice derivace odvoďte derivaci funkce $y = x^2$ v libovolném $x^* \in \mathbb{R}$.

Derivace vyšších řádů

Protože lze derivaci funkce f chápat jako funkci, můžeme definovat derivaci funkce f' v nějakém bodě x^*; tu pak nazýváme druhou derivací funkce f v bodě x^* a značíme $f''(x^*)$. Rovněž vlastní druhou derivaci funkce f lze chápat jako funkci f'' na množině $D(f'') \subseteq D(f')$. Ta může mít opět derivaci v některém bodě atd. Obecně definujeme:

Druhou derivací funkce f rozumíme funkci $f'' = (f')'$ a pro libovolné $n \geqslant 2$ definujeme n-tou derivaci (derivaci n-tého řádu) funkce f vztahem $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$.

Vzorce pro derivování elementárních funkcí

Pro derivace elementárních funkcí platí:

$$c' = 0, \qquad (x^n)' = nx^{n-1},$$

$$(\sin x)' = \cos x, \qquad (\cos x)' = -\sin x,$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \qquad (\operatorname{cotg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x},$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{x^2+1}, \qquad (\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{x^2+1},$$

$$(e^x)' = e^x, \qquad (a^x)' = a^x \cdot \ln a,$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}, \qquad (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a},$$

kde $c, n \in \mathbb{R}$, $a > 0$.

Pravidla pro výpočet derivace

Nechť mají funkce f, g derivaci na množině M. Pak platí:

a) $\big(f(x) \pm g(x)\big)' = f'(x) \pm g'(x)$,

b) $\big(cf(x)\big)' = cf'(x)$,

c) $\big(f(x) \cdot g(x)\big)' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$,

d) je-li $g(x) \neq 0$, pak $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$.

Derivace složené funkce

Nechť funkce $u = g(x)$ má derivaci $g'(x)$, funkce $y = f(u)$ má derivaci $f'(u)$ a nechť platí $D(f) \supseteq H(g)$. Pak složená funkce $y = F(x) = f[g(x)]$ má derivaci a platí:

$$F'(x) = f'[g(x)] \cdot g'(x).$$

Příklad

Vypočtěte derivace následujících funkcí:

(a) $y = 4x^3 - 2x^2 + 3x - 1$, (b) $y = 3\sqrt[3]{x}$,

(c) $y = x^2 \ln x$, (d) $y = \frac{\cos x - 1}{\sin x}$,

(e) $y = \operatorname{arctg} x^2$, (f) $y = \sqrt{e^x + x}$.

Aplikace derivací ve slovních úlohách

Příklad

Jak rychle klesá voda ve válcové nádrži o poloměru r, jestliže vytéká rychlostí 3 000 l/min.

Příklad

Horkovzdušný balón stoupá kolmo vzhůru. Je zachycen radarem, který je 500 m od místa vzletu a který v té chvíli udává elevační úhel $\pi/4$, přičemž úhel roste rychlostí 0,14 rad/min. Jak rychle stoupá balón v tomto okamžiku?

Příklad

Policejní auto sleduje auto lupičů. Přijíždí k pravoúhlé křižovatce ze severu, přičemž auto lupičů již ujíždí o křižovatky na východ. Když je policejní auto 0,6 km od křižovatky a auto lupičů 0,8 km od křižovatky, udává radar v policejním autě, že se auto lupičů vzdaluje od jejich auta rychlostí 40 km/h. Policejní auto jede v té chvíli rychlostí 120 km/h. Určete rychlost auta lupičů v tomto okamžiku.

Derivace vs. spojitost

Má-li funkce f vlastní derivaci v bodě x^*, pak je funkce f spojitá v bodě x^*. (Opačné tvrzení?)

Lagrangeova věta o střední hodnotě

Nechť funkce f je spojitá na intervalu $[a, b]$ a v každém bodě $x \in (a, b)$ má derivaci $f'(x)$. Pak existuje bod $c \in (a, b)$, pro který platí

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Označme body roviny $A = (a, f(a))$, $B = (b, f(b))$. Lagrangeova věta říká, že existuje alespoň jeden vnitřní bod c z intervalu (a, b) takový, že tečna v bodě $(c, f(c))$ je rovnoběžná s úsečkou AB.

Důsledek 1.33(i)

Nechť funkce f, g mají vlastní derivace v každém bodě otevřeného intervalu I. Jestliže pro všechna $x \in I$ platí $f'(x) = g'(x)$, pak se funkce f, g liší o konstantu, tj. existuje $c \in \mathbb{R}$ takové, že $f(x) = g(x) + c$. Zejména jestliže $f'(x) = 0$ na I, pak je f na I konstantní.

Derivace vs. spojitost

Má-li funkce f vlastní derivaci v bodě x^*, pak je funkce f spojitá v bodě x^*. (Opačné tvrzení?)

Lagrangeova věta o střední hodnotě

Nechť funkce f je spojitá na intervalu $[a, b]$ a v každém bodě $x \in (a, b)$ má derivaci $f'(x)$. Pak existuje bod $c \in (a, b)$, pro který platí

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Označme body roviny $A = (a, f(a))$, $B = (b, f(b))$. Lagrangeova věta říká, že existuje alespoň jeden vnitřní bod c z intervalu (a, b) takový, že tečna v bodě $(c, f(c))$ je rovnoběžná s úsečkou AB.

Důsledek 1.33(i)

Nechť funkce f, g mají vlastní derivace v každém bodě otevřeného intervalu I. Jestliže pro všechna $x \in I$ platí $f'(x) = g'(x)$, pak se funkce f, g liší o konstantu, tj. existuje $c \in \mathbb{R}$ takové, že $f(x) = g(x) + c$. Zejména jestliže $f'(x) = 0$ na I, pak je f na I konstantní.

L'Hospitalovo pravidlo

Nechť $x^* \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ a nechť je splněna jedna z podmínek

i) $\lim\limits_{x \to x^*} f(x) = \lim\limits_{x \to x^*} g(x) = 0$,

ii) $\lim\limits_{x \to x^*} |f(x)| = \lim\limits_{x \to x^*} |g(x)| = +\infty$.

Existuje-li (vlastní nebo nevlastní) $\lim\limits_{x \to x^*} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, pak existuje také $\lim\limits_{x \to x^*} \frac{f(x)}{g(x)}$ a platí

$$\lim_{x \to x^*} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x^*} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Derivace

L'Hospitalovo pravidlo

Nechť $x^* \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ a nechť je splněna jedna z podmínek

i) $\lim\limits_{x \to x^*} f(x) = \lim\limits_{x \to x^*} g(x) = 0$,

ii) $\lim\limits_{x \to x^*} |f(x)| = \lim\limits_{x \to x^*} |g(x)| = +\infty$.

Existuje-li (vlastní nebo nevlastní) $\lim\limits_{x \to x^*} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, pak existuje také $\lim\limits_{x \to x^*} \frac{f(x)}{g(x)}$ a platí

$$\lim_{x \to x^*} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x^*} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Petr Zemánek (PřF MU, Brno) zemanekp@math.muni.cz MPE_VPAM: Kapitola 1 13. září 2023 34 / 54

Neurčité výrazy (i)

Neurčitými výrazy rozumíme limitu součtu, součinu, rozdílu a podílu funkcí, v nichž limity jednotlivých funkcí existují, ale příslušné operace s nimi nejsou definovány. Jde o tyto případy:

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \infty - \infty, \quad 0 \cdot \infty, \quad 0^0, \quad \infty^0, \quad 1^\infty.$$

První dva případy limit lze řešit pomocí l'Hospitalova pravidla, další případy je možné převést na první dva následovně:

a) Limita typu „$\infty - \infty$“, tj. $\lim_{x\to x^*} f(x) = \infty = \lim_{x\to x^*} g(x)$. Pak

$$\lim_{x\to x^*} \big(f(x) - g(x)\big) = \lim_{x\to x^*} \left(\frac{1}{\frac{1}{f(x)}} - \frac{1}{\frac{1}{g(x)}}\right) = \lim_{x\to x^*} \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)g(x)}},$$

což je typ „$\frac{0}{0}$“.

b) Limita typu „$0 \cdot \infty$“, tj. $\lim_{x\to x^*} f(x) = 0$, $\lim_{x\to x^*} |g(x)| = \infty$. Pak

$$\lim_{x\to x^*} f(x)g(x) = \lim_{x\to x^*} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}},$$

což je typ „$\frac{0}{0}$“.

Neurčité výrazy (ii)

c) Limity typu „0^0, ∞^0, 1^∞“. Řešíme úpravou na exponenciální funkci:

$$\lim_{x\to x^*} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to x^*} e^{g(x)\ln f(x)} = e^{\lim\limits_{x\to x^*} g(x)\ln f(x)}.$$

V poslední upravě jsme použili větu o limitě složené funkce, neboť funkce e^x je spojitá. Přitom limita v exponentu je již typu „$0 \cdot \infty$“.

Příklad

Vypočtěte limity:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{3x - \sin x}{x}$, (b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x+x^2}$,

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right)$, (d) $\lim\limits_{x\to 0+} x\ln x$,

(e) $\lim\limits_{x\to 0+} x^x$, (f) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

1 Funkce

2 Polynom

3 Racionální funkce

4 Limita funkce

5 Derivace

6 Monotonie a extrémy funkce

7 Průběh funkce

8 Taylorova věta

Z geometrického významu derivace a vlastností funkce tangens plyne:

Derivace vs. monotonie (i)

Nechť f má vlastní derivaci na otevřeném intervalu I.

a) Je-li $f'(x) > 0$ pro každé $x \in I$, pak je f rostoucí na I.
b) Je-li $f'(x) < 0$ pro každé $x \in I$, pak je f klesající na I.

Je-li funkce f rostoucí na otevřeném intervalu I, může nastat $f'(x^*) = 0$ pro nějaké x^*? S využitím Lagrangeovy věty se dá ukázat následující tvrzení.

Derivace vs. monotonie (ii)

Nechť f má vlastní derivaci na otevřeném intervalu I.

a) Funkce f je neklesající právě tehdy, když $f'(x) \geqslant 0$ pro každé $x \in I$.
b) Funkce f je rostoucí právě tehdy, když $f'(x) \geqslant 0$ pro každé $x \in I$, přičemž rovnost $f'(x) = 0$ nastane pouze v konečném počtu bodů.
c) Funkce f je nerostoucí právě tehdy, když $f'(x) \leqslant 0$ pro každé $x \in I$.
d) Funkce f je klesající právě tehdy, když $f'(x) \leqslant 0$ pro každé $x \in I$, přičemž rovnost $f'(x) = 0$ nastane pouze v konečném počtu bodů.

Z geometrického významu derivace a vlastností funkce tangens plyne:

Derivace vs. monotonie (i)

Nechť f má vlastní derivaci na otevřeném intervalu I.

a) Je-li $f'(x) > 0$ pro každé $x \in I$, pak je f rostoucí na I.

b) Je-li $f'(x) < 0$ pro každé $x \in I$, pak je f klesající na I.

Je-li funkce f rostoucí na otevřeném intervalu I, může nastat $f'(x^*) = 0$ pro nějaké x^*? S využitím Lagrangeovy věty se dá ukázat následující tvrzení.

Derivace vs. monotonie (ii)

Nechť f má vlastní derivaci na otevřeném intervalu I.

a) Funkce f je neklesající právě tehdy, když $f'(x) \geqslant 0$ pro každé $x \in I$.

b) Funkce f je rostoucí právě tehdy, když $f'(x) \geqslant 0$ pro každé $x \in I$, přičemž rovnost $f'(x) = 0$ nastane pouze v konečném počtu bodů.

c) Funkce f je nerostoucí právě tehdy, když $f'(x) \leqslant 0$ pro každé $x \in I$.

d) Funkce f je klesající právě tehdy, když $f'(x) \leqslant 0$ pro každé $x \in I$, přičemž rovnost $f'(x) = 0$ nastane pouze v konečném počtu bodů.

Lokální extrémy

Řekneme, že funkce f má v bodě x^*:

a) lokální maximum, existuje-li okolí $\mathcal{O}(x^*)$ tak, že pro každé $x \in \mathcal{O}(x^*)$ je $f(x) \leqslant f(x^*)$,

b) lokální minimum, existuje-li okolí $\mathcal{O}(x^*)$ tak, že pro každé $x \in \mathcal{O}(x^*)$ je $f(x) \geqslant f(x^*)$,

c) ostré lokální maximum, jestliže existuje okolí $\mathcal{O}(x^*)$ tak, že pro každé $x \in \mathcal{O}(x^*) \setminus \{x^*\}$ je $f(x) < f(x^*)$,

d) ostré lokální minimum, jestliže existuje okolí $\mathcal{O}(x^*)$ tak, že pro každé $x \in \mathcal{O}(x^*) \setminus \{x^*\}$ je $f(x) > f(x^*)$.

Lokální maxima a minima nazýváme souhrnně lokální extrémy.

Stacionární bod

Nechť má funkce f v bodě x^* lokální extrém a nechť existuje derivace $f'(x^*)$. Pak

$$f'(x^*) = 0.$$

V takovém případě se bod x^* nazývá stacionární bod funkce f.

Lokální extrém tedy může nastat pouze ve stacionárním bodě nebo v bodě, ve kterém neexistuje vlastní derivace $f'(x)$.

Opačně věta neplatí: Ve stacionárním bodě funkce nemusí nastat extrém! Například funkce $f(x) = x^3$ má v $x^* = 0$ derivaci $f'(0) = 0$, ale nemá v tomto bodě extrém.

Existence lokálního extrému (i)

Mění-li derivace funkce při přechodu přes stacionární bod znaménko, má zde funkce lokální extrém (lokální maximum v případě $\oplus \rightsquigarrow \ominus$ a lokální minimum v případě $\ominus \rightsquigarrow \oplus$).

Existence lokálního extrému (ii)

Nechť $f'(x^*) = 0$, tj. x^* je stacionární bod, a nechť existuje $f''(x^*)$.

a) Je-li $f''(x^*) > 0$, pak má funkce f v bodě x^* ostré lokální minimum.

b) Je-li $f''(x^*) < 0$, pak má f v bodě x^* ostré lokální maximum.

Příklad

Najděte lokální extrémy funkce

(a) $f(x) = x^3 - 12x - 6,$ (b) $f(x) = x - 1 - \sqrt{|x|}.$

Globální extrémy

Nechť funkce f je definovaná na množině M. Jestliže $x^* \in M$ a platí

$$f(x) \leqslant f(x^*)$$

pro všechna $x \in M$, říkáme, že funkce f má na M globální (absolutní) maximum v bodě x^*. Podobně definujeme globální minimum.

Jednoznačnost globálních extrémů?

Postačující podmínka pro existenci globálních extrémů? Viz Weierstrassovu větu. Pokud nejsou některé z těchto předpokladů splněny, nemusí globální extrémy existovat.

Jak najít globální extrémy?

Pokud máme zajištěno, že na nějakém intervalu existují globální extrémy funkce f, používáme pro jejich nalezení následující postup:

- Najdeme v daném intervalu stacionární body a body, ve kterých neexistuje první derivace.
- Vypočteme funkční hodnoty v těchto bodech.
- Vypočteme funkční hodnoty v krajních bodech intervalu (pokud patří do $D(f)$).
- Ze všech takto získaných funkčních hodnot vybereme největší a nejmenší. To bude globální maximum a minimum.

Globální extrémy

Nechť funkce f je definovaná na množině M. Jestliže $x^* \in M$ a platí

$$f(x) \leqslant f(x^*)$$

pro všechna $x \in M$, říkáme, že funkce f má na M <u>globální (absolutní) maximum</u> v bodě x^*. Podobně definujeme <u>globální minimum</u>.

Jednoznačnost globálních extrémů?

Postačující podmínka pro existenci globálních extrémů? Viz Weierstrassovu větu. Pokud nejsou některé z těchto předpokladů splněny, nemusí globální extrémy existovat.

Jak najít globální extrémy?

Pokud máme zajištěno, že na nějakém intervalu existují globální extrémy funkce f, používáme pro jejich nalezení následující postup:

- Najdeme v daném intervalu stacionární body a body, ve kterých neexistuje první derivace.
- Vypočteme funkční hodnoty v těchto bodech.
- Vypočteme funkční hodnoty v krajních bodech intervalu (pokud patří do $D(f)$).
- Ze všech takto získaných funkčních hodnot vybereme největší a nejmenší. To bude globální maximum a minimum.

Globální extrémy

Nechť funkce f je definovaná na množině M. Jestliže $x^* \in M$ a platí

$$f(x) \leqslant f(x^*)$$

pro všechna $x \in M$, říkáme, že funkce f má na M <u>globální (absolutní) maximum</u> v bodě x^*. Podobně definujeme <u>globální minimum</u>.

Jednoznačnost globálních extrémů?

Postačující podmínka pro existenci globálních extrémů? Viz Weierstrassovu větu. Pokud nejsou některé z těchto předpokladů splněny, nemusí globální extrémy existovat.

Jak najít globální extrémy?

Pokud máme zajištěno, že na nějakém intervalu existují globální extrémy funkce f, používáme pro jejich nalezení následující postup:

- Najdeme v daném intervalu stacionární body a body, ve kterých neexistuje první derivace.
- Vypočteme funkční hodnoty v těchto bodech.
- Vypočteme funkční hodnoty v krajních bodech intervalu (pokud patří do $D(f)$).
- Ze všech takto získaných funkčních hodnot vybereme největší a nejmenší. To bude globální maximum a minimum.

Aplikace derivací při optimalizačních úlohách (I)

Příklad

Ze čtverce papíru o straně 54 cm vystřihněte v každém rohu stejný čtverec tak, aby krabice složená ze zbytku papíru měla maximální objem.

Příklad

Určete rozměry litrové plechovky válcového rozměru tak, aby spotřeba materiálu na její výrobu byla minimální.

Příklad

Celkové náklady na výrobu Q jednotek jisté komodity jsou

$$C(Q) = aQ^2 + bQ + c, \quad Q > 0,$$

kde a, b, c jsou dané kladné konstanty. Určete minimum funkce průměrných nákladů, tj.

$$A(Q) = C(Q)/Q = aQ + b + c/Q.$$

Aplikace derivací při optimalizačních úlohách (II)

Příklad

Uvažte, že 1 hektar půdy má výnos $Y(N)$ bušelů pšenice při použití N kg hnojiva. Je-li P [v Kč] tržní cena 1 bušelu pšenice a q je cena 1 kg hnojiva, potom zisk je

$$\Pi(N) = PY(N) - qN, \quad N \geqslant 0.$$

Předpokládejte, že existuje N^* takové, že $\Pi'(N) \geqslant 0$ pro $N \leqslant N^*$ a $\Pi'(N) \leqslant 0$ pro $N \geqslant N^*$.

Aplikace derivací při optimalizačních úlohách (III)

Příklad

(Dlužník či věřitel?) Jeden z vašich (imaginárních) kolegů má aktuální příjem y_1 a očekává budoucí příjem y_2. Současně nyní plánuje útratu c_1 a v budoucnu útratu c_2 tak, aby maximalizoval užitkovou funkci

$$U = \ln c_1 + \frac{1}{1+\delta} \ln c_2, \quad c_1, c_2 > 0,$$

kde $\delta > 0$ je jeho „inflace“ spotřeby v budoucnu ve srovnání se současností.

Pokud si nyní vypůjčí tak, aby $c_1 > y_1$, pak budoucí útrata pro zaplacení dluhu $c_1 - y_1$ s úrokem ve výši r bude

$$c_2 = y_2 - (1+r)(c_1 - y_1).$$

Naopak, pokud nyní uspoří, tj. $c_1 < y_1$, pak budoucí útrata bude

$$c_2 = y_2 + (1+r)(y_1 - c_1),$$

kde r je nyní úrok jeho úspor. Určete optimální plán (dluh/spoření).

1 Funkce

2 Polynom

3 Racionální funkce

4 Limita funkce

5 Derivace

6 Monotonie a extrémy funkce

7 Průběh funkce

8 Taylorova věta

Nyní se zaměříme na to, jak derivace souvisí s tvarem grafu funkce, tj. s tím, jak je graf vydutý (zakřivený). Pro popis této vlastnosti zavedeme pojmy konvexní a konkávní funkce.

V následujícím předpokládejme, že má funkce f derivaci na intervalu I.

Konvexní a konkávní funkce

Řekneme, že funkce f je konvexní na intervalu I, jestliže graf funkce leží nad tečnou v libovolném bodě tohoto intervalu, tj. platí

$$f(x) \geqslant f(x^*) + f'(x^*)(x - x^*) \quad \text{pro } x, x^* \in I.$$

Řekneme, že funkce f je konkávní na intervalu I, jestliže graf funkce leží pod tečnou v libovolném bodě tohoto intervalu, tj. platí

$$f(x) \leqslant f(x^*) + f'(x^*)(x - x^*) \quad \text{pro } x, x^* \in I.$$

Konvexnost/ konkávnost

Nechť I je otevřený interval a f má druhou derivaci na I.

a) Je-li $f''(x) > 0$ pro každé $x \in I$, pak je f konvexní na I.
b) Je-li $f''(x) < 0$ pro každé $x \in I$, pak je f konkávní na I.

Inflexní bod (i)

Řekneme, že x^* je inflexním bodem funkce f, jestliže je vlevo od bodu x^* konkávní a vpravo od tohoto bodu je konvexní, anebo naopak. Stručně říkáme, že funkce f má v bodě x^* inflexi.

Inflexní bod (ii)

a) Nechť x^* je inflexní bod a nechť existuje $f''(x^*)$. Pak $f''(x^*) = 0$.
b) Nechť $f''(x^*) = 0$ a $f''(x)$ mění znaménko v bodě x^*, potom je x^* inflexním bodem funkce f.
c) Nechť $f''(x^*) = 0$ a $f'''(x^*) \neq 0$. Pak je x^* inflexním bodem funkce f.

Pomocí limit můžeme také „analyzovat“ chování funkce v bodech, kde není definována, případně i její chování v nekonečnu. Dostáváme se tak k asymptotám funkce neboli přímkám, ke kterým se graf funkce „blíží“. Asymptoty mohou být dvojího typu:

i) V bodech, kde není funkce definovaná a limita zprava nebo zleva je v těchto bodech nevlastní.

ii) Pro $x \to \infty$ a/nebo $x \to -\infty$ se graf funkce blíží k nějaké přímce.

Asymptoty funkce

Přímka $x = x^*$ se nazývá asymptotou bez směrnice funkce f, jestliže má f v x^* alespoň jednu jednostrannou limitu nevlastní, tj.

$$\lim_{x \to x^{*}+} f(x) = \pm\infty \quad \text{nebo} \quad \lim_{x \to x^{*}-} f(x) = \pm\infty.$$

Přímka $y = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, se nazývá asymptotou se směrnicí funkce f, jestliže platí

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0 \quad \text{nebo} \quad \lim_{x \to -\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0.$$

Jak najít asymptoty se směrnicí?

Přímka $y = ax + b$ je asymptotou funkce f pro $x \to +\infty$, jestliže

$$a = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}, \qquad b = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - ax)$$

(obě tyto limity jsou vlastní). Analogické tvrzení platí pro $x \to -\infty$.

Vyšetřování průběhu funkce

a) Stanovíme definiční obor $D(f)$. Určíme nulové body a intervaly, kde je funkce kladná a kde záporná. Případně zda je funkce f sudá, lichá nebo periodická.

b) Vypočítáme f' a podle jejího znaménka určíme:
- intervaly, kde je f rostoucí (z podmínky $f' > 0$),
- intervaly, kde je f klesající (z podmínky $f' < 0$),
- lokální extrémy (podle změny znaménka f').

c) Vypočítáme f'' a podle jejího znaménka určíme:
- intervaly, kde je f konvexní (z podmínky $f'' > 0$),
- intervaly, kde je f konkávní (z podmínky $f'' < 0$),
- inflexní body (podle změny znaménka f'').

d) Určíme asymptoty funkce f.

e) Vypočítáme funkční hodnoty ve významných bodech (lokální extrémy, inflexní body atd.).

f) Nakreslíme graf funkce.

Příklad

Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = -\frac{x^2}{x+1}$$

1 Funkce
2 Polynom
3 Racionální funkce
4 Limita funkce
5 Derivace
6 Monotonie a extrémy funkce
7 Průběh funkce
8 Taylorova věta

Taylorův polynom stupně n se středem x^*

Nechť má funkce f v bodě x^* všechny derivace až do řádu n, které jsou vlastní. Chceme funkce v okolí bodu x^* nahradit polynomem

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x^*) + \cdots + a_n(x - x^*)^n$$

tak, aby funkci aproximoval co nejpřesněji $\rightsquigarrow$ rozumný požadavek:

$$f^{(i)}(x^*) = P_n^{(i)}(x^*) \qquad \text{pro} \qquad i = 0, \ldots, n.$$

Máme tedy $n + 1$ rovnic o neznámých a_i $(i = 0, \ldots, n)$. Platí

$$\begin{aligned} f(x^*) &= P_n(x^*) = a_0, \\ f'(x^*) &= P_n'(x^*) = a_1, \\ f''(x^*) &= P_n''(x^*) = 2a_2, \\ &\vdots \\ f^{(n)}(x^*) &= P_n^{(n)}(x^*) = n(n-1) \cdot \cdots \cdot 1 \cdot a_n = n!a_n. \end{aligned}$$

Hledaný polynom je tedy tvaru

$$P_n(x) = f(x^*) + \frac{f'(x^*)}{1!}(x - x^*) + \frac{f''(x^*)}{2!}(x - x^*)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x^*)}{n!}(x - x^*)^n.$$

Taylorova věta

Nechť má funkce f v okolí bodu x^* vlastní derivace až do řádu $n + 1$ pro nějaké $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Pak pro všechna x z tohoto okolí platí:

$$f(x) = f(x^*) + \frac{f'(x^*)}{1!}(x - x^*) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x^*)}{n!}(x - x^*)^n + R_n(x), \tag{2}$$

$$\text{kde} \quad R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x^*)^{n+1},$$

přičemž ξ je vhodné číslo ležící mezi x^* a x. Chyba $R_n(x)$ se nazývá zbytek a vzorec (2) se nazývá Taylorův vzorec.

Je-li $x^* = 0$, mluvíme o tzv. Maclaurinově vzorci.

Příklad

Určete Maclaurinovy vzorce stupně n pro funkce

(a) $f(x) = e^x$, (b) $f(x) = \sin x$.

Podobně lze odvodit např.

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + R_{2n+1}(x),$$

$$\ln(x + 1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + R_n(x).$$

Konec.